第二章 中国早期的数学文化

§2.1 中国早期的算筹文化

中国传统数学以计算为中心，在算法的构造性和机械化方面取得了十分辉煌的成就。其中，十进位置值制记数法、筹算和珠算在数学发展中所起的作用及其显示出来的优越性，在世界数学史上占有重要的地位。

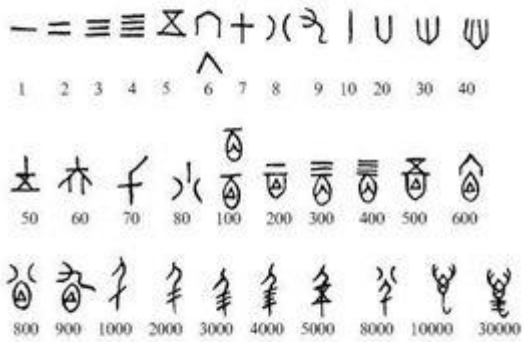
一、计算工具——算筹

算筹即用于计算的小竹棍，它是中国人创造的计算工具。珠算产生以前，我们的祖先用算筹来计算。算筹又称筹、策、算子等。算筹起源于何时，已难征考。“算”和“筹”二字出现在春秋战国时期的著作（如《仪礼》、《孙子》、《老子》、《法经》、《管子》、《荀子》等）中。因此，最迟在春秋末年，算筹的使用已相当普遍。

算筹常用竹制成，也有用木、骨或石做的，近年来出土的算筹用骨制成。据《汉书·律历志》记载，“算法用竹，径一分，长六寸”，分别合今 0.23 厘米、13.8 厘米。这与 1971 年陕西省千阳县出土的西汉骨质算筹基本吻合。1954 年在长沙的一座战国楚墓中挖出一个竹筒，内装竹棍 40 根，是为算筹之实物。这种算筹是当时世界上最灵巧的计算工具，简便、灵活，可进行复杂的计算。

二、算筹记数依据十进位置值制

先秦典籍中有“隶首作数”、“结绳记事”、“刻木记事”的记载，说明我们的先民在生产和生活的实践活动中，从判别事物的多寡中逐渐认识了数。中国古代的记数据《易·系辞》记载：“上古结绳而治，后世圣人易之以书契。”三国时期，吴人虞翻在《易九家义》中也说：“事大，大结其绳；事小，小结其绳，结之多少，随物众寡。”这些记载说明在文字产生之前，曾用绳结的多少表示实物数量的多少，这是原始社会普遍使用的记数法。此外还有刻画记数，这是比结绳记数更进步的一种记数法。



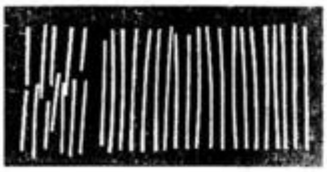
从有文字记载开始，我国的记数法就遵循十进制。殷代的甲骨文（公元前 14~前 11 世纪）和西周的钟鼎文都有一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万等 13 个记数单字，在殷墟出土的甲骨文卜辞中出现最大的数字为“三万”，十万以内的自然数的记数用合文书写，其中已经蕴含有十进位置值制的萌芽。例如二千六百五十六写作（甲骨文），六百五十九写作（钟鼎文）。这种记数法含有明显的位置值制意义，“”字表示隔开多位数字。实际上，只要把“千”、“百”、“十”和“”的字样取消，便和位置值制记数法基本一样了。

春秋战国时期是我国从奴隶制转变到封建制的时期，生产的迅速发展和科学技术的进步提出了大量比较复杂的数字计算问题。为了适应这种需要，劳动人民创造了一种十分重要的用算筹计算的方法。中国最晚在春秋末年人们已经掌握了完备的十进位置值制记数法，普通使用了算筹这种先进的计算工具。人们已谙熟九九乘法表、整数四则运算，并使用了分数。

算筹计数的具体方法见于公元 400 年左右的《孙子算经》：

“凡算之法，先识其位。一纵十横，百立千僵，千、十相望，万、百相当”。

算筹记数有纵横两种形式：古代算筹的功用大致和后来的算盘珠相仿。五以下数用几根筹表示几，6，7，8，9 四个数目，用一根筹放在上边表示五，余下来每一根筹表示一，放在下边。用算筹表示数时有纵、横两种方式（图２－



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

图表 3

１）：

图２－１

这是九个基数，零则以空位显示。我国的算筹采用位置值制记数法，即将万，千，百，十等意义，通过数码所在位置加以表示，若要表示一个多位数，可像现在用阿拉伯数码记数一样，把各位的数目从左到右横排。个位数用纵式表示，十位数用横式，百位、万位用纵式，千位、十万位用横式，以此类推，交替使用纵横两式。如 4728 用算筹表示出来是𝍬𝍦𝍪𝍧，遇到数字有空位，如 39057 则用算筹表示为𝍢𝍱□𝍤𝍦，这时百位上是空位，不放算筹，由于每位数字记法需纵横相间，中间有没有空位是容易辨别的。显然这种位置值制记数法，比同时代的罗马记数法要先进多了。

算筹以 18 种筹式符号，再加上空格，可以表示任意的自然数，是典型的十进位置值制记数法。在古代文明中，古巴比伦采用 60 进位置值制记数法；古希腊(以及后来的古罗马)虽使用十进制记数法，但不是位置值制，十、百、千用不同的符号表示，使用起来远不及中国的十进位置值制记数法方便。我国的这种记数法，对世界文明的发展具有重大意义，著名科技史家李约瑟博士认为：“如果没有这种十进位制，就几乎不可能出现我们现在这个统一化的世界了。”

中国古代用算筹进行计算，称作筹算。中国古代数学的光辉成就，大都得益于筹算的便利。依据位置值制，整数四则运算需要熟练掌握。古时乘法口诀从“九九八十一”开始， 故称“九九乘法表”或简称“九九”。 《管子》等书中便记载着“九九”歌诀，顺序与今正好相反。春秋战国时代，“九九” 歌己是家喻户晓的常识了。《吕氏春秋》记载，齐桓公(公元前 685~公

元前 643 年在位)求贤纳士，有一个人以懂得“九九”之术自荐，齐桓公让人戏弄他说：“九九足以见乎?”那人答道：“九九薄能耳，而君礼之，况贤于九九者乎?”桓公听了以后觉得很有道理，于是以礼待之。一月之间，四方有能之士竟相投奔桓公，为他所用，终于成就了桓公的霸业。对此，《韩诗外传》和《战国策》等也有记载。

三、中国古代的测绘工具——规、矩

在中国出土的新石器时代的陶器大多为圆形或其他规则形状，陶器上有各种几何图案，通常还有三个着地点，这些都是早期几何知识的萌芽。传说伏羲创造了画圆的“规”、画方的“矩”。规、矩是我国十分优越的两种测绘工具。中国的测量术长期发达，得益于此。规即用来画圆的工具，如图 2—2 是我国早期的规，其中间直立的杆作为固定的脚，右面的尖端为画笔，横杆绕立杆旋转就可以画出圆。图 2—3 是早期的矩，用来画直线形，其形状为一等腰直角三角形的拐尺。商代甲骨文中已有“规”和“矩”的象形字，所以它们最迟在商代已经出现。春秋战国时期，这两种工具被普遍用于测量和几何作图，并延续后代。在汉代出土的砖石画中，例如汉武梁祠的石室造像中，通常可见伏羲执矩，女娲执规的形象。

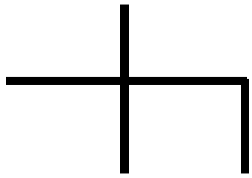


图2—2　规

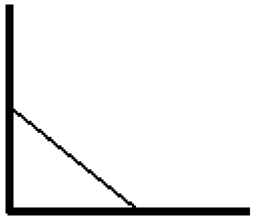


图2—3　矩

§2.2　春秋战国时代数学文化

相传西周初年周公（公元前 11 世纪）制礼，数学成为贵族子弟教育中六门必修课程——“六艺”之一。《周礼·地官司徒》说：“保氏掌谏王恶而养国子以道，乃教之六艺：一曰五礼，二曰六乐，三曰五射，四曰五驭，五曰六书，六曰九数。” 艺者，技艺，把数学作为一种技艺来传授是中国古代非常独特的数学教育观念，这符合中国古代文化的特点，也为后来数学教育的发展规定了方向。不过当时学在官府，数学教育的目的是培养具有一定数学知识（技艺）的官吏，以使他们能胜任官职，数学教育的发展是相当缓慢的。“九数”就是数学的九部分内容，当时是些什么样的内容，已不可考。这种“九数”大体到战国时才有较完备的内容，涉及到现在算术、几何、代数等多方面的内容。而关于整数的四则运算，某些比例和比例分配方法、若干面积和体积公式、勾股和测望的某些方法，则可能在春秋时代已经具备。

值得注意的是，人们在商代甲骨文和西周金文的基础上，逐渐懂得把字写在竹片〈或木片〉上，用绳子穿成册，这就是早期的书。写上字的竹片称为简，或竹简。春秋时期的大批数学成果，便是通过竹简流传下来的。

战国时代，各诸侯国相继完成了向封建制度的过渡。思想界、学术界诸子林立，百家争鸣，学术思想十分活跃。这一时期形成的诸子百家，为中国古代科学文化的发展创造了良好的条件，影响极大。数学园地更是生机盎然，朝气蓬勃。

一、《墨经》的数学知识与数学思想

1.《墨经》中的几何与逻辑知识

《墨经》是以墨翟〈约公元前 490 ~ 公元前 405 年〉为首的墨家学派的著作，墨翟，鲁国人，春秋战国时代杰出的政治家、思想家、科学家，被尊为墨子。《墨经》分《经上》、《经下》、《经说上》、《经说下》四篇，另有《大取》、《小取》二篇。《墨经》是诸子百家中阐述自然科学理论和学说最丰富的著作，包括光学、力学、逻辑学、几何学等各方面的知识。

《墨经》讨论的几何概念可以看作数学理论研究在中国的最初尝试，该书的显著特色是试图把形式逻辑用于几何研究，在这一点上，它同欧几里得（Euclid，约公元前 330~前 275 年）《几何原本》相似，一些几何定义也与《几何原本》中的定义等价。下面略举几例：

（1）经：**“平，同高也”**——两线间高相等，叫做“平”。这实际是平行线的定义。

（2）经：**“同长，以正相尽也”**——“正相尽”是正相合的意思，这里给出了两线段等长的定义，即如果两条线段重合，就叫“同长”。

（3）经：**“中，同长也”**——到线段两端的距离相同的点叫“中（点）”。

（4）经：**“圜，一中同长也”**。——“圜”通“圆”，是环绕的意思。这里是讲到一个中心距离相同的图形叫做“圆”。这与欧几里得《几何原本》中圆的定义颇为相似。

（5）经：**“直，参也”**——这是以三点共线定义为“直”。后来刘徽在《海岛算经》中用“参相直”说明三点在一直线上。

（6）经：**“端，体之无厚，而最前者也”**。——这是现代几何学中的点，点不可分。

说：**“端，是无间也”。**——点，没有空隙。

（7）经：**“方，柱隅四匝也”**——“柱隅四”是棱柱的四个角，“匝”是环绕一周的意思，这里给出了正方形或长方形的意义。

《墨经》注重抽象性和思辨性，以逻辑学作为其论说的工具，《墨经》中逻辑思想十分丰富，其中数学中有一条重要记载：**“小故，有之不必然，无之必不然。大故，有之必然。”**用现代语言说，“大故”是“充分条件”，而“小故”则是“必要条件”。

2.《墨经》中的无限分割思想

有限与无限的矛盾，是数学中的一对基本矛盾。对这一问题认识的不断深化，推动着古今数学的发展。《墨经》中有丰富的无限思想，其中也讨论了分割物体的问题。例如“端”的概念，就是通过无限分割，而最终分到一个不可再分的“端”。墨家认为无限分割的结果终究会达到一个不可再割的“端”，是一种实无限思想。

关于无穷的思想，古代也有萌芽。墨家在度量过程中明确给出“有穷“及“无穷”的定义：

经：**“穷，或有前不容尺也。”**

说：**“穷：或不容尺，有穷；莫不容尺，无穷也。”**

即用一个长度单位“尺”去量一个区域，若能达到距边缘不足这个长度单位“尺”的程度，这称这个区域为有穷；如果继续量下去，前面总是长于这个长度单位“尺”，则称这个区域为无穷。

总之，以上《墨经》中讨论的无限分割以及对“大故”与“小故”的区分等逻辑思想，在哲学史和数学史上都是十分重要的事件。可惜的是，墨家并未发展成为我国思想文化的主流。随着墨家的衰落，墨家数学理论在形成体系之前便夭折了。

3．惠施对数学中"无限"的认识

据战国时成书的《庄子·天下篇》记载，名家宋国人惠施（约公元前 370～公元前 310 年）曾提出：**“至大无外，谓之大一，至小无内，谓之小一”** 的观点。其中“大一”、“小一”可理解为无穷大，无穷小。这段话的意思是：大到没有外部，称为无穷大，小到没有内部，称为无穷小。《庄子·天下篇》书中还有 **“一尺之棰[1]，日取其半，万世不竭”** 的著名命题，可以看作是对“小一“的发挥，其中体现了物质无限可分

名家认为无限分割的过程永远不会完结，类似

惠施曾任梁国的宰相，论辩奇才，是庄子

惠施的著作多已亡佚，只能从其他诸家的论述

相，因而事物之间的差异只是一种相对的概念

辗地”、“矩不方”、“规不可以为圆”、“飞鸟之影

等等，过分强调抽象的数学思想和哲学思辨，

而语。

二、《周易》中的数学知识与数学思想

《周易》又称《易经》，成书于春秋时期

被认为是中国文化的源头，儒家经典之首成

《周易》，包括《经》、《传》。《周易》

通，通则久”，充盈辩证法思想，给后人以

《周易》的宇宙变换模式：《易传·系辞

生八卦”，《易卦》可看作由阴爻（⚋否定）

其中包含的数学思想主要有：

1. 组合数学的萌芽

组合数学虽是现代数学的分支，它的思

有组合数学的萌芽。书中通过阴阳卦爻预言

“两仪”。每次取两个，按不同顺序排列，生成

“四象”：太阴（⚏）、少阴（⚍）、少阳（⚎）、太阳（⚌）。

每次取三个，生成八卦：坤☷、震☳、坎☵、兑☱、艮☶、离☲、巽☴、乾☰。

每次取六个，则生成六十四卦。分别表示 64 种事物或现象的可能状态。四象、八卦与六十四卦的排列，相当于组合数学中的有重排列：从 n 种元素中每次取 r 个，共有 n^r 种排列法。

2. 二进制思想

---

[1] 棰，读chuí

在数学史上，二进制数系是与德国伟大的数学家莱布尼兹（G.W.Leibniz，1646~1716）的名字联系在一起的。莱布尼兹发明二进制后不久，通过来中国传教的传教士白晋（J.Bouvet，1656~1730）了解了中国的许多事情，他还见到了从中国寄去的八卦。莱布尼兹对《周易》很感兴趣，他认为中国的八卦中蕴含着二进制思想，因此惊叹不已，他用中国的二进制来解释手摇计算机的原理。实际上，若把“━━”和“━ ━，”两种卦爻分别用 1 和 0 代替，八卦就转换成二进制的数码，即可表示为

000〈坤〉001〈震〉010〈坎〉011〈兑〉

100〈艮〉101〈离〉110〈巽〉111〈乾〉

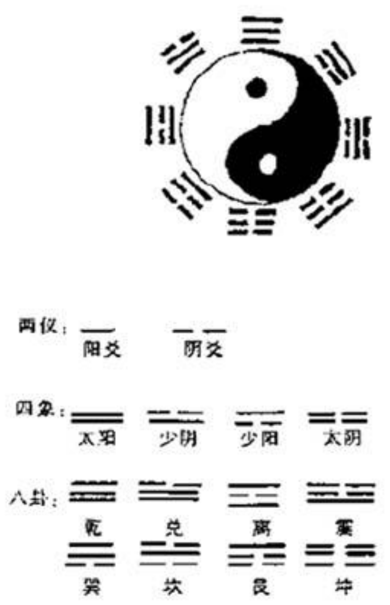


图２－5

莱布尼兹说，“八卦”是“流传于宇宙的科学中最古老的纪念物”，这项发明“对于中国人民实在是值得庆幸的事情”。莱布尼兹也因此产生对中国古代文明的崇敬，特别希望到中国来，但由于种种原因，他未能如愿。据说，出于对中国的向往，莱布尼兹曾复制了一台自己发明的手摇计算机送给中国的康熙皇帝，成为中、德关系史上的一段佳话。不过，在故宫博物院始终没有找到这台机器，中国文献也没有明确记载。所以手摇计算机是否真的送来，还有待考证。

3. 坐标系思想

若把阳爻看作“+”的数学符号，把阴爻看作“-”，八卦中每一卦的三个爻分别作为 x，y，z，则八卦就是：+x+y+z，- x+y+z，…，- x-y-z。正好代表笛卡儿空间坐标系的八个卦限。有材料说，卦限的“卦”字，就是从八卦借用过来的。

《周易·系辞传》记载：“河出图，洛出书，圣人则之。”这是古代文献中关于河图洛书的最早记载。后来发展成九宫图，实际上是中国最古老的三阶段幻方。用现代数字表示就是图 2－6。另外，《周易》极言数学的重要性，说它可以“通神明”（系辞传）“顺性命”（《说卦传》），这一观点对秦九韶等宋代数学家的影响很大。

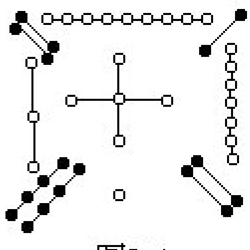


图3-1

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图3-2

§2.3 《周髀算经》与勾股定理

一、《周髀算经》的成书

现今认为《周髀算经》是中国最早的一部天文、数学著作。成书确切年代没有定论，约成书于公元前 1 世纪。它本是一部以数学方法阐述盖天说的天文著作。“髀”原义是股或股骨，这里借指测量用的表(标杆)，因书中记载了不少周代的天文知识，故名《周髀》。唐初选定数学课本时，取名《周髀算经》。

二、《周髀算经》的主要内容和数学成就

《周髀算经》是周代传下来有关测量的理论和方法。卷上记载了"商高答周公问"和"陈子答荣方问"。其中就有中国最早的勾股定理。

1. 勾股定理

《周髀算经》提出的勾股定理。包括特殊和一般两种情形:

此书第一章记述西周开国时期(约公元前 1000 年)周公姬旦与商高的问答:

昔者周公问于商高曰:"窃闻乎大夫善数也,请问古者包牺立周天历度,夫天不可阶而升,地不可得尺寸而度,请问数安从出?"商高曰:"数之法出于圆方,圆出于方,方出于矩,矩出于九九八十一。故折矩,以为句广三、股修四、径隅五……"

这里"句"即"勾",这就是著名的勾股定理的特例 $3^2+4^2=5^2$。

卷上另一处叙述周公后人荣方与陈子(约公元前 6、7 世纪)的对话中。其中包含了陈子利用勾股定理测量太阳高度的方法:

陈子曰:"若求邪至日者,以日下为句,日高为股,句、股各自乘,并而开方除之,得邪至日。……"

这里用勾股定理及比例算法测太阳高远,这是从天文测量中总结出来的普遍原理。周公与商高对话形式中实际上已给出勾股定理的一般形式,故也称之为"商高定理"。它的公式是:

$$弦=\sqrt{勾^2+股^2}$$

这时开平方已有记载,只是没有开方过程。

2. 《周髀算经》的重差术

《周髀算经》中有较详细的记载。周公曰:"大哉言数!请问用矩之道?"商高曰:"平矩以正绳,偃矩以望高,覆矩以测深,卧矩以知远,环矩以为圆,合矩以为方。" 这六句话中的前四句是说"矩"的四种用法,即如何侧直、测高、侧深和侧远。后两句是说"矩"能形成圆方。"平矩以正绳"即是说矩可用来确定铅垂线和水平线,"偃矩以望高"就是说把矩竖直放着可以测高。如果不知目的物的远近,要量它的高,必须两次"偃矩"测望;要量它的深,必须两次"覆矩"测望,要量二目的物之间的距离,必须两次"卧矩"观测。后来数学家称这种测量方法为重差术。《周髀算经》还讨论了测量"日高"二方法。如图 2－7,设在A、B 处立表(即"髀")AA′与 BB′,记表高为 h,表矩为 m,而表日影差为 n(n=BD-AC),《周髀算经》相当于得出日高公式:$PO=PO'+h=\frac{h\times m}{n}+h$ 其它用法,道理与望离类似,这一记载显示了商高时代我国的测量数学水平。我国的陈子也因此被誉为世界"测量学之祖"。

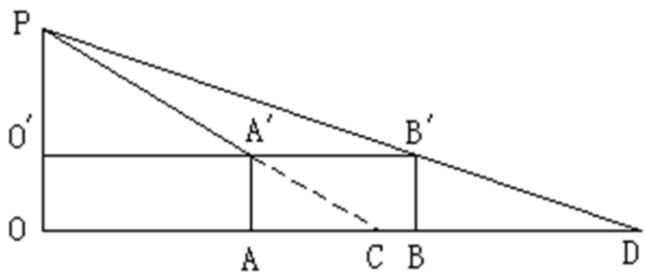


图 2－7

除此之外,《周髀算经》的其他数学成就还有:

(1)分数运算。如四分历的表示,不仅有分数的加减运算,还有乘除运算的实例,有的还相当复杂。

(2)等差数列和圆周长求法。

(3)一次内插法。

3. 赵爽对勾股定理的证明

赵爽，一名婴，字君卿，身世不详，三国时代吴国数学家，全面注《周髀算经》，其中“日高图注”奠定了重差术的理论基础。《周髀算经》注中的“勾股圆方图注”共 600 余字，是数学史上的极有价值的文献。它概括了两汉以来的勾股理论及其应用，对勾股定理进行了表述，并作了理论证明，这也是我国数学家对勾股定理的最早证明，充分表现出中国数学的独特思想方法。

赵爽将勾股定理表述为：

“句股各自乘，并之，为弦实。开方除之，即弦。”

其证明方法叙述为：

“按弦图，又可以句、股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以句股之差自相乘为中黄实。加差实，亦成弦实。”

根据弦图，由四个全等的勾股形和一个正方形所组成，设勾股形的三边分别为 a，b，c，则正方形的边长等于勾股差，由图 2－8 和术文可得：

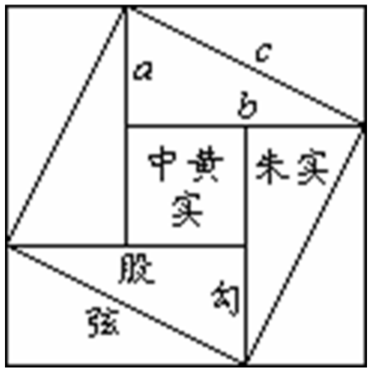


图 2 －8

$$2ab+(b-a)^2=c^2$$

将$(b-a)^2$ 展开即得勾股定理。

赵爽的这个证明可谓独具匠心，体现了中国数学证明的特点：

（1）利用构造方法，而不是通过演绎方法，对几何图形的截、割、拼、补，利用面积或体积关系来证明，简洁、形象、直观，易于理解和掌握，且极富创新意识，这种方法开创了中国出入相补原理的先河，成为中国“析理以辞，解题用图”的先导。

（2）该证明是以形证数，数形结合思想的集中体现。赵爽对勾股定理的证明，利用几何图形的面积与体积关系，来证明代数式之间的恒等关系，这种方法既具有严密性，又体现了数学的整体性，是数学研究的一种重要方法，也是数学发展的一个极其重要的条件。

4. 西方对勾股定理的研究

勾股定理是初等几何中的一个基本定理。这个定理有着十分悠久的历史，几乎所有文明古国（希腊、中国、埃及、巴比伦、印度等）对此定理都有所研究。勾股定理在西方被称为毕达哥拉斯定理，相传是古希腊哲学家、数学家毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前 580～约公元前 500 年）于公元前 550 年首先发现的。据说当他证明了勾股定理以后，欣喜若狂，杀牛百头，以示庆贺。故西方亦称勾股定理为“百牛定理”，但毕达哥拉斯对勾股定理的证明方法已经失传。著名的希腊数学家欧几里得（Euclid，公元前 330—公元前 275 年）在巨著《几何原本》（第 I 卷，命题 47）中给出一个证明：

如图2－9所示，分别以 $Rt\Delta ABC$ 的三边向外做正方形 $AA'DC, BB'EC$ 和 $AA''B''B$, 连接 $A'B, A''C$，

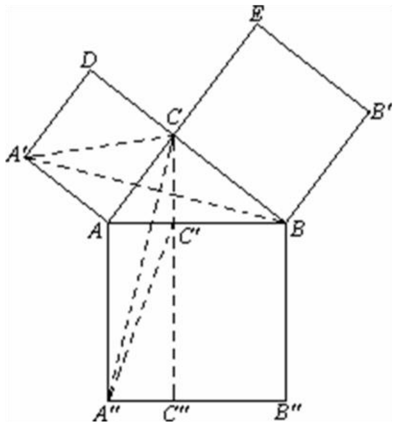


图2－9

$\because AA' = AC, AB = AA'', \angle A'AB = \angle CAA''$

$\therefore \triangle ABA' \cong \triangle AA''C$（SAS）

过 C 作 A''B''的垂线，分别交 AB，A''B''于 C'和 C''，

连接 $A'C, A''C'$,

$\because S_{\Delta AA'B} = S_{\Delta AA'C}$(同底等高)

$S_{\Delta AA''C} = S_{\Delta AA''C'}$（同底等高)

而 $\Delta ABA' \cong \Delta AA''C$

$\therefore S_{\Delta ABA'} = S_{\Delta AA''C}$

$\therefore S_{\Delta AA'C} = S_{\Delta AA''C'}$

易知：$S_{正方形ACDA'} = 2S\Delta_{AA'C}$

$S_{矩形AA''C''C'} = 2S\Delta_{AA''C'}$

$\therefore S_{正方形ACDA'} = S_{矩形AA''C''C'}$

同理可得：

$S_{正方形BB'EC} = S_{矩形B''BC'C''}$

$\therefore S_{正方形AA''B''B} = S_{正方形ACDA'} + S_{正方形BB'EC}$

即：$AC^2 + BC^2 = AB^2$

很有意思的是，美国第二十任总统伽菲尔德也曾给出过勾股定理的证明，现简述如下:

如图$2-10$，将$Rt\Delta ABC$竖起，得到$Rt\Delta BED$

$$S_{梯形ACDE}=\frac{1}{2}(a+b)^2=\frac{1}{2}\left(a^2+2ab+b^2\right)\ldots\ldots①$$

又$S_{梯形ACDE}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta EBD}+S_{\Delta ABE}$

$$=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ba+\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}\left(2ab+c^2\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots②$$

比较以上二式，便得：$a^2+b^2=c^2$

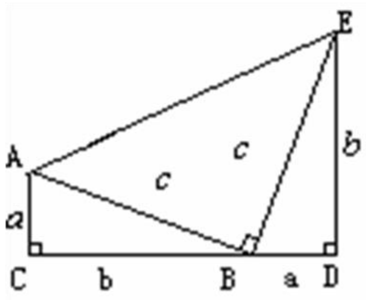


图２－10

1876 年 4 月 1 日，伽菲尔德在《新英格兰教育日志》上发表了他对勾股定理的这一证明。5 年后，伽菲尔德就任美国第二十任总统。后来，人们为了纪念他对勾股定理直观、简捷、易懂、明了的证明，就把这一证法称为勾股定理的“总统”证法，这在数学史上被传为佳话。

人们对勾股定理感兴趣的原因还在于它可以作出推广，得出许多有价值的结论。例如：

欧几里得在他的《几何原本》中给出了勾股定理的推广定理：“直角三角形斜边上的一个直边形，其面积为两直角边上两个与之相似的直边形面积之和。”

从上面这一定理可以推出下面的定理：“以直角三角形的三边为直径作圆，则以斜边为直径所作圆的面积等于以两直角边为直径所作两圆的面积之和。”

勾股定理还可以推广到空间：

以直角三角形的三边为对应棱作相似多面体，则斜边上的多面体的表面积等于直角边上两个多面体表面积之和。

三个侧面两两垂直的四面体的各个侧面面积的平方和等于底面面积的平方。

若以直角三角形的三边为直径分别作球，则斜边上的球的表面积等于两直角边上所作两球表面积之和。

如此等等。